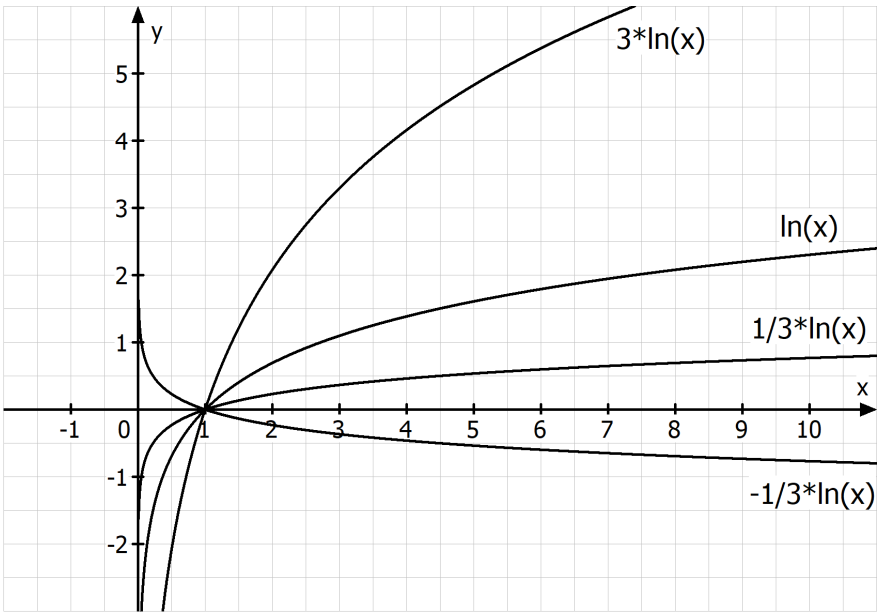
Die allgemeine ln-Funktion

Wir untersuchen den Einfluss der Parameter a, b, c und d auf den Graphen der allgemeinen natürlichen Logarithmusfunktion f der Form $f(x)=a\cdot\ln\left(bx+c\right)+d$

mit $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ und $a\neq 0; b\neq 0$.

Die Funktion mit der Gleichung $f(x)=a\cdot\ln(x)$ mit $a\neq 0$:

Beispiele: $f(x)=3\cdot\ln(x)$ $f(x)=\frac{1}{3}\cdot\ln(x)$ $f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\ln(x)$



Der Parameter a beeinflusst die Steigung des Funktionsgraphen.
Er bewirkt eine Streckung oder Stauchung entlang der y-Achse.

$a>1$: Graph steigt schneller als der Graph der ln-Funktion (gestreckt).

$0<a<1$: Graph steigt langsamer als der Graph der ln-Funktion (gestaucht).

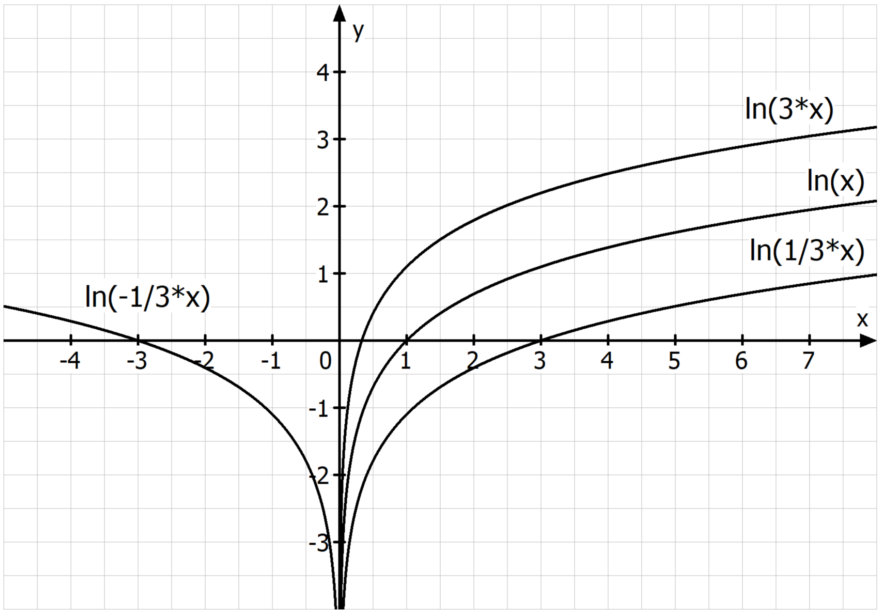
$a>0$: Graph streng monoton steigend und rechtsgekrümmt.

$a<0$: Graph streng monoton fallend und linksgekrümmt.

Jochen Weber

Die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \ln(b \cdot x)$ mit $b \neq 0$:

Beispiele: $f(x) = \ln(3 \cdot x)$ $f(x) = \ln(\frac{1}{3} \cdot x)$ $f(x) = \ln(-\frac{1}{3} \cdot x)$



$b > 1$: Graph ist im Vergleich zum Graphen der ln-Funktion entlang der x-Achse gestaucht.

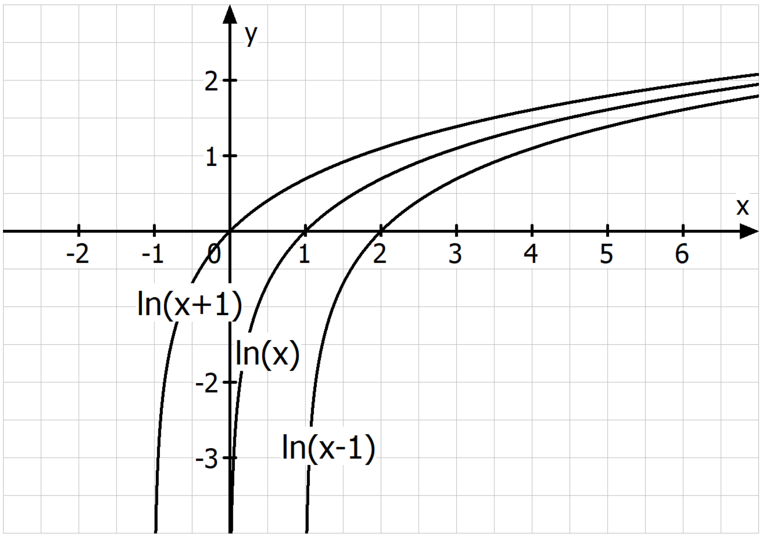
$0 < b < 1$: Graph ist im Vergleich zum Graphen der ln-Funktion entlang der x-Achse gestreckt.

$b > 0$: die Funktion ist nur für positive x-Werte definiert und streng monoton steigend.

$b < 0$: die Funktion ist nur für negative x-Werte definiert und streng monoton fallend.

Die Funktion mit der Gleichung $f(x)=\ln(x-c)$ mit $c\in\mathbb{R}$:

Beispiele: $f(x)=\ln(x+1)$ $f(x)=\ln(x-1)$

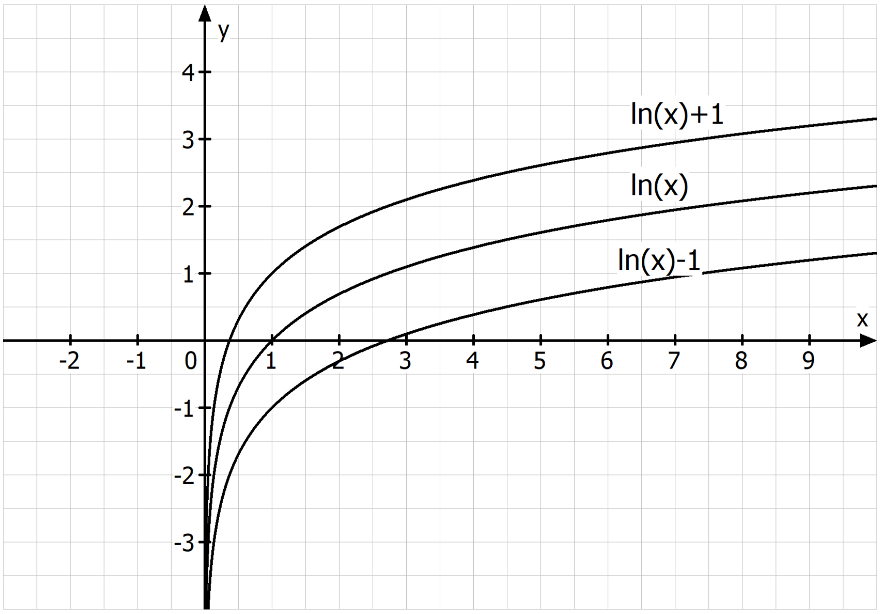


$c>0$: Verschiebung um c Einheiten nach rechts

$c<0$: Verschiebung um c Einheiten nach links

Die Funktion mit der Gleichung $\ln(x)+d$ mit $d\in\mathbb{R}$ **:**

Beispiele: $f(x)=\ln(x)+1$ $\quad f(x)=\ln(x)-1$



$d>0$: Verschiebung um d Einheiten nach oben

$d<0$: Verschiebung um d Einheiten nach unten

Zusammenfassung:

Bei einer Logarithmusfunktion f mit einer Gleichung der Form

$f(x) = a\cdot\ln(bx-c)+d$ mit $a,b,c,d\in\mathbb{R}; a\neq 0; b\neq 0$ beeinflussen

die Parameter den Graphen wie folgt:

Parameter a und b: Streckung bzw. Stauchung entlang und Spiegelung an den Koordinatenachsen

Parameter c: Verschiebung entlang der x-Achse

Parameter d: Verschiebung entlang der y-Achse

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=-\ln\left(2x+1\right)-0{,}5$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$.

Erläutern Sie die Einflüsse der Parameter, ermitteln Sie die maximale Definitionsmenge sowie die Nullstelle von f und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in ein kartesisches Koordinatensystem.

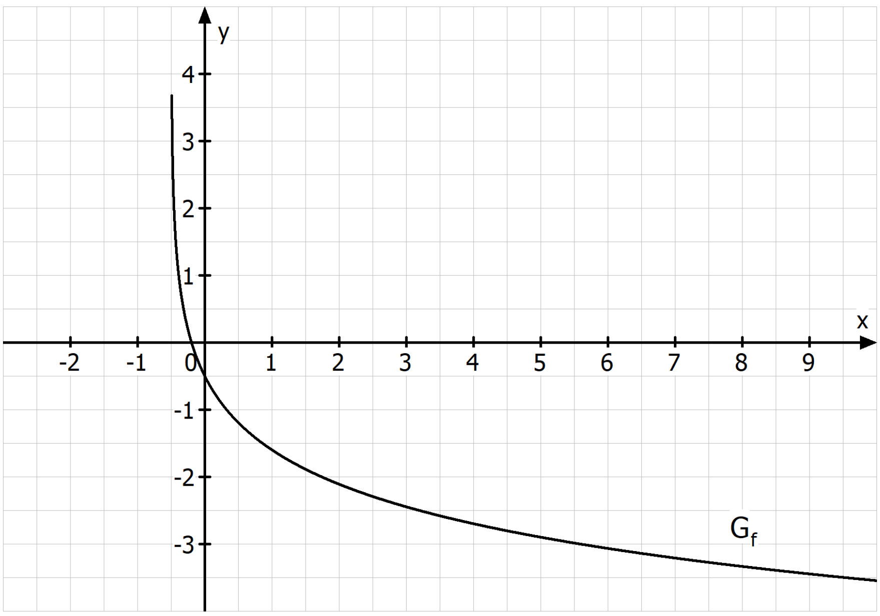
$$f(x)=-\ln\left(2x+1\right)-0{,}5=-\ln\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)-0{,}5$$

$a=-1$: keine Streckung/Stauchung entlang der y-Achse;
G_f gespiegelt an der x-Achse

$b=2$: gestaucht entlang der x-Achse

$c=-\frac{1}{2}$: verschoben um 0,5 nach links

$d=-0{,}5$: verschoben um 0,5 nach unten



Definitionsmenge:

$2x+1>0 \quad \Rightarrow x>-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow D_f = \left]-0{,}5;\infty\right[$

$x=-0{,}5$ senkrechte Asymptote

Nullstelle:

$-\ln\left(2x+1\right)-0{,}5=0 \quad \Rightarrow \ln\left(2x+1\right)=-0{,}5$

$\Rightarrow 2x+1=e^{-0{,}5} \quad \Rightarrow x=\frac{e^{-0{,}5}-1}{2}\approx -0{,}20$

Aufgaben:

1.0 Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Nullstelle von folgenden Funktionen.

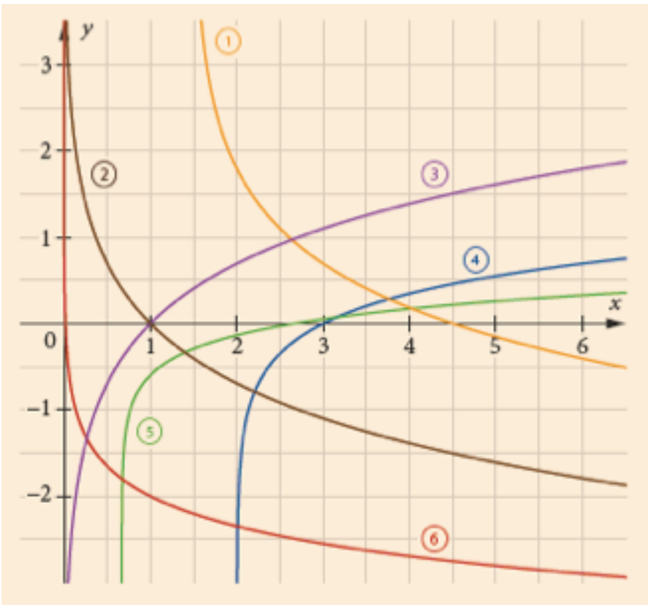
1.1 $f(x) = 3 \cdot \ln(3x-4)$

1.2 $f(x) = 2 \cdot \ln(3-x)$

2.0 Gegeben sind die folgenden vier Funktionsterme:

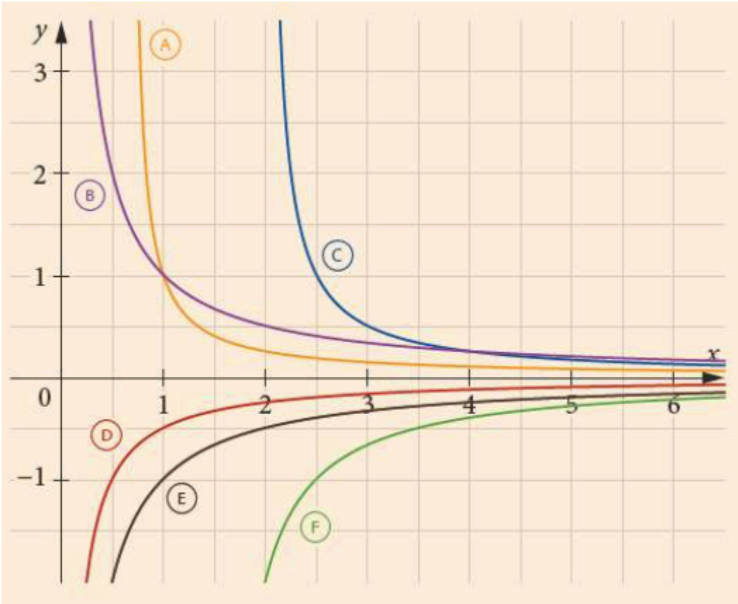
$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x-2) \quad g(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) \quad h(x) = -\ln\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) \quad k(x) = -\frac{1}{2} \cdot \ln(x) - 2$$

2.1 Ordnen Sie den Termen die passenden Funktionsgraphen zu und begründen Sie Ihre Auswahl.



2.2 Geben Sie die Terme zu den übrigen Funktionsgraphen an.

2.3 Ordnen Sie den Funktionsgraphen die richtigen Ableitungsgraphen zu.



3.0 Bestimmen Sie die Definitionsmenge, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, das Monotonie- und Krümmungsverhalten der folgenden Funktionen. Untersuchen Sie das Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge und zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse die zugehörigen Funktionsgraphen.

3.1 $f(x)=2\cdot\ln\left(3x\right)-2$

3.2 $f(x)=-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(3x+2\right)$

Lösungen zu den Aufgaben:

1.1

Definitionsmenge:

$$3x-4>0 \quad \Rightarrow x>\frac{4}{3} \quad \Rightarrow D_f = \left]\frac{4}{3};\infty\right[$$

Nullstelle:

$$3\cdot\ln\left(3x-4\right)=0 \quad \Rightarrow \ln\left(3x-4\right)=0 \quad \Rightarrow 3x-4=1 \quad \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

1.2

Definitionsmenge:

$$3-x>0 \quad \Rightarrow x<3 \quad \Rightarrow D_f = \left]-\infty;3\right[$$

Nullstelle:

$$2\cdot\ln\left(3-x\right)=0 \quad \Rightarrow \ln\left(3-x\right)=0 \quad \Rightarrow 3-x=1 \quad \Rightarrow x=2$$

2.1

f: 4 Nullstelle bei $x=3$

g: 5 Nullstelle bei $x=\frac{8}{3}$

h: 1 Nullstelle bei $x=4{,}5$

k: 6 Nullstelle bei $x=e^{-4}$

2.2 1 $f(x)=\ln\left(x\right)$ 2 $f(x)=-\ln\left(x\right)$

2.3 $1\to F$ $2\to E$ $3\to B$ $4\to C$ $5\to A$ $6\to D$

3.1

Definitionsmenge:

$3x > 0 \quad \Rightarrow x > 0 \quad \Rightarrow D_f =]0;\infty[$

Schnittpunkt mit der y – Achse: $y = 2\cdot\ln(0) - 2$ (f) keinen Schnittpunkt

Schnittpunkt mit der x – Achse:

$2\cdot\ln(3x) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \ln(3x) = 1 \quad 3x = e \quad \Rightarrow x = \frac{e}{3} \approx 0{,}91 \quad N(0{,}91|0)$

Monotonieverhalten:

$f'(x) = 2\cdot\frac{1}{3x}\cdot 3 = \frac{2}{x} > 0$ für alle $x \in D_f$

$\Rightarrow G_f$ sms in $]0;\infty[$

Krümmungsverhalten:

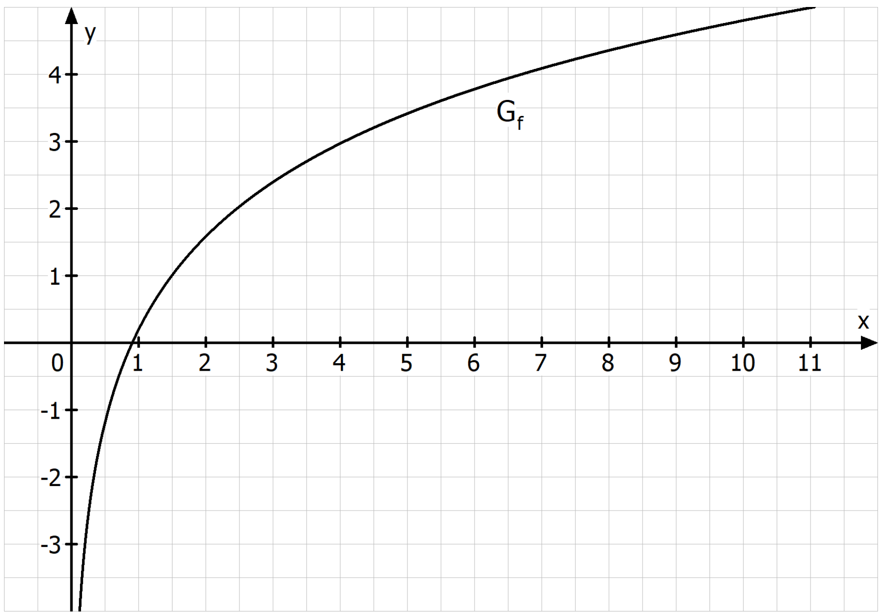
$f''(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$ für alle $x \in D_f$

$\Rightarrow G_f$ rechtsgekrümmt in $]0;\infty[$

Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge:

$x \overset{>}{\to} 0 \qquad 2\cdot\underbrace{\ln(3x)}_{\to-\infty} - 2 \to -\infty$

$x \to \infty \qquad 2\cdot\underbrace{\ln(3x)}_{\to\infty} - 2 \to \infty$



3.2

Definitionsmenge:

$$3x+2>0 \quad \Rightarrow x>-\frac{2}{3} \quad \Rightarrow D_f = \left]-\frac{2}{3};\infty\right[$$

Schnittpunkt mit der y – Achse:

$$y=-\frac{1}{2}\cdot\ln(3\cdot 0+2)=-\frac{1}{2}\ln(2)\approx -0{,}35 \qquad S_y\left(0\,|\,-0{,}35\right)$$

Schnittpunkt mit der x – Achse:

$$-\frac{1}{2}\cdot\ln(3x+2)=0 \quad \Rightarrow \ln(3x+2)=0 \quad 3x+2=1 \quad \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \quad N\left(-\frac{1}{3}\,|\,0\right)$$

Monotonieverhalten:

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x+2}\cdot 3=\frac{-3}{6x+4}<0 \text{ für alle } x\in D_f$$

$$\Rightarrow G_f \text{ smf in } \left]-\frac{2}{3};\infty\right[$$

Krümmungsverhalten:

$$f''(x)=\frac{0\cdot(6x+4)-(-3)\cdot 6}{(6x+4)^2}=\frac{18}{(6x+4)^2}>0 \text{ für alle } x\in D_f$$

$$\Rightarrow G_f \text{ linksgekrümmt in } \left]-\frac{2}{3};\infty\right[$$

Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge:

$$x \overset{>}{\to} -\frac{2}{3} \qquad -\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\ln(3x+2)}_{\to-\infty}\to+\infty$$

$$x\to+\infty \qquad -\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\ln(3x+2)}_{\to\infty}\to-\infty$$